3章　重積分

問1

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{2}=1$ より，$z=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{2}y+2$

また，領域Dを

$\boldsymbol{D=\{(x,\ y)|0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2\}}$とすれば

$$\boldsymbol{V=\iint_D\left(2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)dxdy}$$

問2

$$与式=\int_0^1\left\{\int_1^2(x^2-xy)dx\right\}dy$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}yx^2\right]_1^2dy$$
$$=\int_0^1\left\{\left(\frac{8}{3}-2y\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y\right)\right\}dy$$
$$=\int_0^1\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}y\right)dy$$
$$=\left[\frac{7}{3}y-\frac{3}{4}y^2\right]_0^1$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{3}{4}=\frac{28-9}{12}=\boldsymbol{\frac{19}{12}}$$

問3

（1）$$与式=\int_0^1\left\{\int_0^2(2x+y)dy\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left[2xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^2dx$$
$$=\int_0^1(4x+2)dx$$
$$=\left[2x^2+2x\right]_0^1$$
$$=2+2=\boldsymbol{4}$$

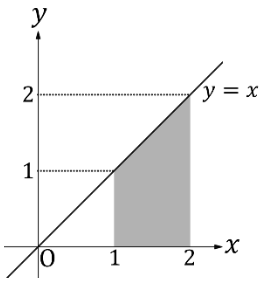
（2）$$与式=\int_{-1}^3\left\{\int_{-2}^1 xy^2dy\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^3\left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{-2}^1dx$$
$$=\int_{-1}^3\left(\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}x\right)dx$$
$$=\int_{-1}^3(3x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^3$$
$$=\left(\frac{27}{2}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{24}{2}=\boldsymbol{12}$$

（3）$$与式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dy\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-(-\sin x)+\cos x\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-(-\cos 0+\sin 0)$$
$$=0+1+1-0=\boldsymbol{2}$$

（4）$$与式=\int_0^1\left\{\int_0^1 xe^{xy}dy\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left[xe^{xy}\cdot\frac{1}{x}\right]_0^1dx$$
$$=\int_0^1(e^x-e^0)dx$$
$$=\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\left[e^x-x\right]_0^1$$
$$=e^1-1-(e^0-0)$$
$$=e-1-1=\boldsymbol{e-2}$$

問４

（１）領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \left\{ \int_0^x x dy \right\} dx$$

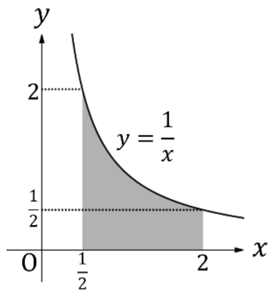
$$= \int_1^2 \Big[xy \Big]_0^x dx$$

$$= \int_1^2 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{7}{3}}$$

（２）領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} (x - 2y) dy \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \Big[xy - y^2 \Big]_0^{\frac{1}{x}} dx$$

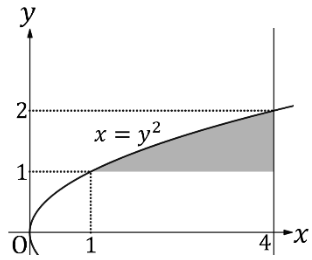
$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 = \mathbf{0}$$

（３）領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \left\{ \int_{y^2}^4 y\sqrt{x} dx \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left[y \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{y^2}^4 dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{2}{3} yx\sqrt{x} \right]_{y^2}^4 dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{3} y \cdot 4\sqrt{4} - \frac{2}{3} y \cdot y^2 \sqrt{y^2} \right) dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_1^2 (8y - y^4) dy$$

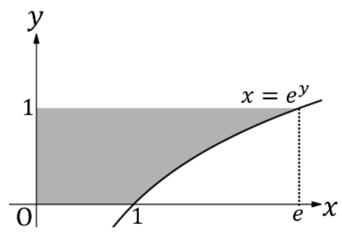
$$= \frac{2}{3} \left[4y^2 - \frac{1}{5} y^5 \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ 4 \cdot 2^2 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \left(4 \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 \right) \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left(16 - \frac{32}{5} - 4 + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{29}{5} = \mathbf{\frac{58}{15}}$$

（４）領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{e^y} 2x dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \Big[x^2 \Big]_0^{e^y} dy$$

$$= \int_0^1 \{ (e^y)^2 - 0 \} dy$$

$$= \int_0^1 e^{2y} dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{0}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{2} - 1)}$$

$\boxed{\text{問5}}$

（１）$x + y \leqq 1$より，$y \leqq 1 - x$であるから，領域Dは次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1 - x$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x + y)dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x)^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x - x^2 + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^2 + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

【別解】

$x + y \leqq 1$より，$x \leqq 1 - y$であるから，領域Dは次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq 1 - y$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-y} (x + y)dx \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \right]_0^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(1 - y)^2 + y(1 - y) \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}y^2 + y - y^2 \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

（２）$x^2 + y^2 \leqq 4$より，$y^2 \leqq 4 - x^2$，

すなわち，$-\sqrt{4 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4 - x^2}$であるから，

領域Dは次の不等式で表すことができる．

$-2 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{4 - x^2}$

したがって

$$\text{与式} = \int_{-2}^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right\} dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left\{ \frac{1}{2}\left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^2 (4 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 (4 - x^2)dx \quad \text{※被積分関数が偶関数}$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

【別解】

$x^2 + y^2 \leqq 4$より，$x^2 \leqq 4 - y^2$，

すなわち，$-\sqrt{4 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{4 - y^2}$であるから，

領域Dは次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 2$，$-\sqrt{4 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{4 - y^2}$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^2 \left\{ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y dx \right\} dy$$

$$= \int_0^2 \left[yx \right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_0^2 \left\{ y\sqrt{4 - y^2} - y\left(-\sqrt{4 - y^2} \right) \right\} dy$$

$$= \int_0^2 2y\sqrt{4 - y^2}dy$$

$4 - y^2 = t$とおくと，$-2ydy = dt$より，$2ydy = -dt$

また，yとtの対応は

y	0	$\to$	2
t	4	$\to$	0

よって

$$与式 = \int_4^0 \sqrt{t}(-dt)$$

$$= -\int_4^0 \sqrt{t}dt$$

$$= \int_0^4 \sqrt{t}dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

問6

（1）$x = 2y$より，$y = \dfrac{x}{2}$であるから，

領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2,\ \dfrac{x}{2} \leqq y \leqq 1$

したがって

$$与式 = \boldsymbol{\int_0^2 \left\{\int_{\frac{x}{2}}^1 f(x,\ y)dy\right\}dx}$$

（2）$y = 2 - \dfrac{1}{2}x$より，$x = 4 - 2y$であるから，

領域は次の不等式で表すことができる．

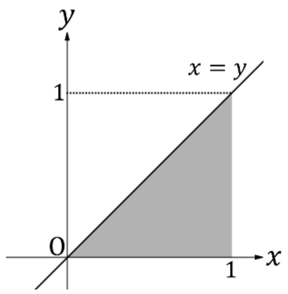
$0 \leqq x \leqq 4 - 2y,\ 1 \leqq y \leqq 2$

したがって

$$与式 = \boldsymbol{\int_1^2 \left\{\int_0^{4-2y} f(x,\ y)dx\right\}dy}$$

問7

$0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1$であるから，領域は図のようになる．



この領域は，$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$と表せるので

$$与式 = \int_0^1 \left\{\int_0^x e^{-x^2}dy\right\}dx$$

$$= \int_0^1 \left[e^{-x^2}y\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

$-x^2 = t$とおくと，$-2xdx = dt$より，$xdx = -\dfrac{1}{2}dt$

また，xとtの対応は

x	0	$\to$	1
t	0	$\to$	-1

よって

$$与式 = \int_0^{-1} e^t\left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{2}(e^0 - e^{-1}) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

問8

求める体積をVとする．$x + y = 2$より，$y = 2 - x$であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2 - x$

この領域内で$z = 4 - x^2 \geqq 0$なので

$$V = \int_0^2 \left\{\int_0^{2-x} (4 - x^2)dy\right\}dx$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2)\left[y\right]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 (4 - x^2)(2 - x)dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right]_0^2$$

$$= 4 - \frac{16}{3} - 8 + 16$$

$$= \frac{12 - 16 + 24}{3} = \boldsymbol{\frac{20}{3}}$$

問9

（1）領域Dを，$x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$とすると，

この領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2 - x^2}$

この領域内で，$z = y \geqq 0$であるから，

求める体積をVとすると

$$V = 2\iint_D y\,dxdy$$

$$= 2\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right\} dx$$

$$= 2\int_0^a \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

$$= \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}$$

（２）領域Dを，$x^2 + y^2 \leqq a^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$とすると，

この領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2 - x^2}$

この領域内で，$z = \sqrt{a^2 - x^2} \geqq 0$であるから，

求める体積をVとすると

$$V = 4\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$$

$$= 4\int_0^a \left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy\right\} dx$$

$$= 4\int_0^a \left\{\sqrt{a^2-x^2}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\right\} dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\left[y\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^a (a^2 - x^2)dx$$

$$= 4\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= 4\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

$$= 4\cdot\frac{2}{3}a^2 = \boldsymbol{\frac{8}{3}a^3}$$